Kathrin Baumgarten

MATHE

FABI-Trainer

Teil III: Integralrechnung

Nicht-Technik

Lösungen

Inhalt

© FABI-Trainer

Aufgabenblock 1

Finden Sie jeweils die Stammfunktion:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x$

Lösung:

$$F(x) = \frac{\frac{1}{3}}{2}x^{1+1} + c$$

$$F(x) = \frac{1}{6}x^2 + c$$

b) $k(x) = \frac{2}{3}x^2 - 6x$

Lösung:

$$K(x) = \frac{\frac{2}{3}}{3}x^{2+1} - \frac{6}{2}x^{1+1} + c$$

$$K(x) = \frac{2}{9}x^3 - 3x^2 + c$$

c) $h(x) = (x-3)(x+2)$

Lösung:

Bevor man die Stammfunktion bestimmt, muss man ausmultiplizieren.

$$h(x) = x^2 + 2x - 3x - 6$$

$$h(x) = x^2 - x - 6$$

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$$

d) $g(x) = (x^2 - 1) \cdot 6x$

Lösung:

Auch hier muss zunächst ausmultipliziert werden

$$g(x) = 6x^3 - 6x$$

$$G(x) = \frac{6}{4}x^4 - \frac{6}{2}x^2 + c$$

$$G(x) = \frac{3}{2}x^4 - 3x^2 + c$$

© FABI-Trainer

oder man lässt die „6“ vor der Klammer und findet dann eine Stammfunktion:

$$g(x) = 6 \cdot (x^3 - x)$$

$$G(x) = 6 \cdot \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \right) + c$$

$$G(x) = \frac{6}{4} x^4 - 3x^2 + c$$

$$G(x) = \frac{3}{2} x^4 - 3x^2 + c$$

e) $i(x) = \frac{1}{4} x^4 + 6x^3 - 7x + 16$

Lösung:

$$I(x) = \frac{1}{20} x^5 + \frac{6}{4} x^4 - \frac{7}{2} x^2 + 16x + c$$

$$I(x) = \frac{1}{20} x^5 + \frac{3}{2} x^4 - \frac{7}{2} x^2 + 16x + c$$

© FABI-Trainer

Aufgabenblock 2

Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int (2x^2 - 6x)dx$

Lösung:

$$\int (2x^2 - 6x)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + c = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + c$$

b) $\int [3(x-2)(x+4)]dx$

Lösung:

$$\int [\ 3(x-2)(x+4)\ ]dx \overset{Faktorregel}{=} 3 \cdot \int [\ (x-2)(x+4)\ ]dx$$

Der Ausdruck hinter dem Integralzeichen muss ausmultipliziert werden, bevor man integriert.

$$3 \cdot \int (x^2 + 2x - 8)dx = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x \right) + c = x^3 + 3x^2 - 24x + c$$

c) $\int [5(x+1)^2(x-3)]dx$

Lösung:

$$\int \left[5(x+1)^2(x-3)\right]dx \overset{Faktorregel}{=} 5 \cdot \int (x+1)^2(x-3)dx = 5 \cdot \int \underbrace{(x^2 + 2x + 1)}_{Binom}(x-3)dx$$

$$= 5 \cdot \int (x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x + x - 3)dx = 5 \cdot \int (x^3 - x^2 - 5x - 3)dx$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x \right) + c = \frac{5}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{25}{2}x^2 - 15x + c$$

d) $\int [5(x+1)^2(x-3)]dx$

Lösung:

$$\int \left(\frac{2}{7}x^3 + 6x + 8 \right)dx = \frac{2}{28}x^4 + \frac{6}{2}x^2 + 8x + c = \frac{1}{14}x^4 + 3x^2 + 8x + c$$

© FABI-Trainer

Aufgabenblock 3

1) AP 1994 AI 3.3

Gegeben sind die Parabel $p(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 12$ und die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 12x + 16)$.

Die Parabel G_p, der Graph G_f und die y-Achse schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein.

Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

Lösung:

Da es sich um ein Flächenstück zwischen zwei Funktionsgraphen handelt, müssen wir zunächst die Schnittpunkte berechnen. Wir setzen die Funktionsterme gleich, also

$$p(x) = f(x)$$

$$-\frac{3}{4}x^2 + 12 = \frac{1}{6}(-x^3 + 12x + 16) \qquad /\cdot 6$$

$$-\frac{9}{2}x^2 + 72 = -x^3 + 12x + 16 \qquad /+x^3; -12x; -16$$

$$x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 56 = 0$$

Gleichung 3. Grades mit additiver Konstante → Polynomdivision
Wir erraten $x_1 = 4$

$$4^3 - \frac{9}{2}\cdot 4^2 - 12\cdot 4 + 56 = 0 \qquad (w)$$

$$\begin{array}{l}
(x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 12x + 56) : (x-4) = x^2 - \frac{1}{2}x - 14 \\
\underline{-(x^3 - 4x^2)} \\
\quad -\frac{1}{2}x^2 - 12x \\
\quad \underline{-(-\frac{1}{2}x^2 + 2x)} \\
\qquad -14x + 56 \\
\qquad \underline{-(-14x + 56)}
\end{array}$$

0

Weitere mögliche Schnittstellen erhalten wir durch $x^2 - \frac{1}{2}x - 14 = 0$

Wir berechnen zunächst nur die Diskriminante:

$$D = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = \frac{1}{4} + 56 = 56{,}25$$

$$x_{2/3} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{56{,}25}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm 7{,}5}{2}$$

$$x_2 = 4 \qquad x_3 = -3{,}5$$

Da $x_{1/2} = 4$ *eine doppelte Lösung ist, berühren sich die Funktionsgraphen an dieser Stelle.*

Ohne Zeichnung wissen wir nun, dass wir von 0 bis 4 integrieren müssen, da die y-Achse den „linken" Rand des Flächenstücks bildet.

Wir wissen nicht, welche Funktion oberhalb liebt, was aber nichts ausmacht. Sollte das Flächenstück „negativ" sein, setzen wir es anschließend einfach in Betrag.

Hinweis: In den Abituraufgaben liegt eigentlich immer eine Zeichnung vor.

$$A = \int_0^4 \left[p(x) - f(x)\right]dx \quad \text{oder} \quad A = \left|\int_0^4 \left[p(x) - f(x)\right]dx\right|$$

Wir berechnen zunächst p(x)-f(x):

$$-\frac{3}{4}x^2 + 12 - \frac{1}{6}(-x^3 + 12x + 16)$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 + 12 + \frac{1}{6}x^3 - 2x - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{28}{3};$$

Dann bestimmen wir eine Stammfunktion:

$$\int\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{28}{3}\right)dx = \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 + \frac{28}{3}x\right]$$

Erst jetzt berechnen wir

© FABI-Trainer

$$A=\int_0^4 [p(x)-f(x)]dx = \left[\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{4}x^3-x^2+\frac{28}{3}x\right]_0^4$$

$$=\frac{1}{24}\cdot 4^4-\frac{1}{4}\cdot 4^3-4^2+\frac{28}{3}\cdot 4-0=10\frac{2}{3}-16-16+37\frac{1}{3}=16$$

Da die Fläche „positiv" ist, wissen wir nun, dass für $x\in[0;4]$ G_p oberhalb von G_f liegt. Die Graphen sind hier abgebildet:

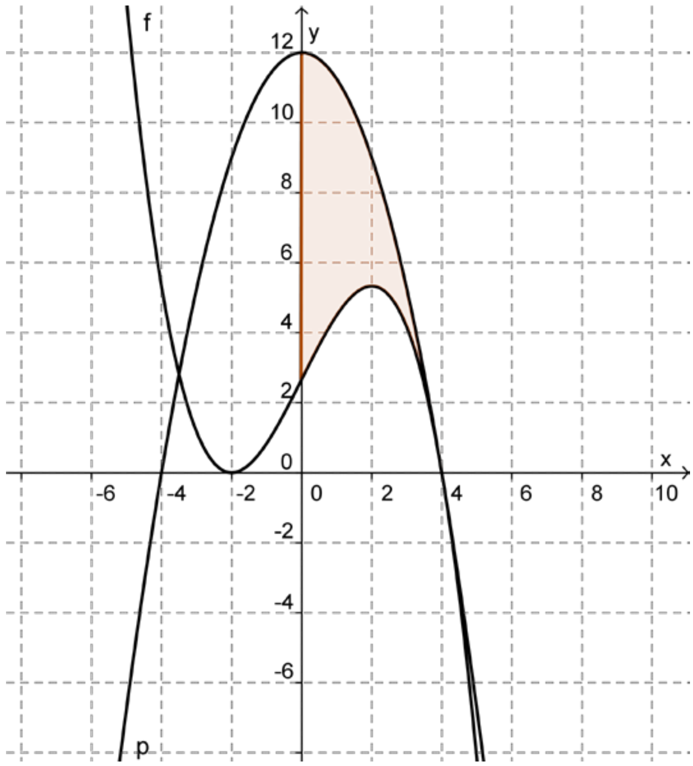

Abbildung 1: Funktionsgraphen $p(x)=-\frac{3}{4}x^2+12$ *und* $f(x)=\frac{1}{6}(-x^3+12x+16)$

2) AP 204 AI 1.3.5

Die Gerade t mit der Gleichung $y=-2x-3$ und G_f mit $f(x)=\frac{1}{27}x^4+\frac{2}{9}x^3-2x-3$ schließen ein im II. und III. Quadranten liegendes Flächenstück ein.

Fertigen Sie eine Zeichnung an und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts.

Lösung:

Wir bestimmen (bevor wir zeichnen) die Schnittstellen:

© FABI-Trainer

$$-2x-3=\frac{1}{27}x^4+\frac{2}{9}x^3-2x-3 \qquad /\cdot 27$$
$$-54x-81=x^4+6x^3-54x-81$$
$$x^4+6x^3=0$$
$$x^3(x+6)=0$$
$$x_{1/2/3}=0 \qquad x_4=-6$$

Jetzt zeichnen wir die Funktionsgraphen. Die Gerade t ist die Wendetangente (Hinweis: Diese musste in einer vorausgehenden Aufgabe berechnet werden).

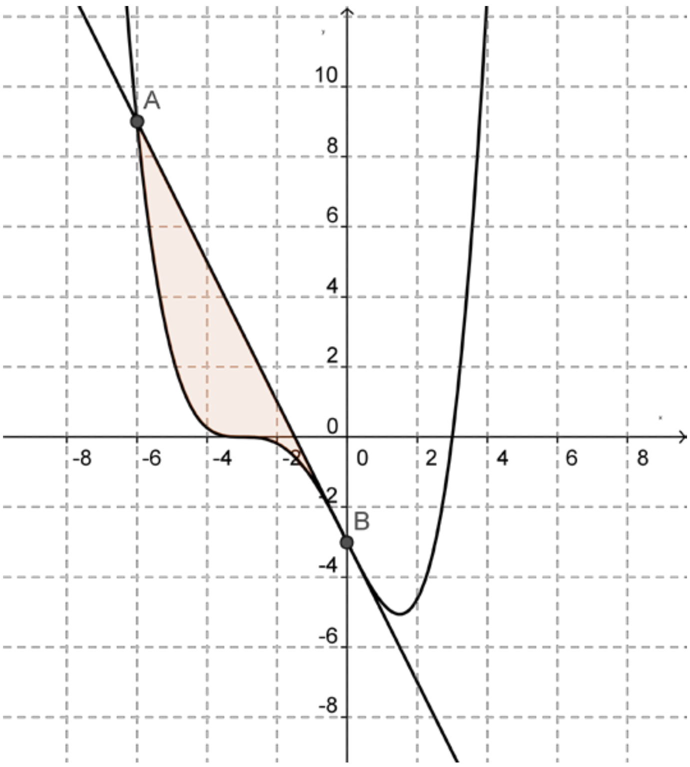

Abbildung 2: Funktionsgraphen von $y=-2x-3$ *und* $f(x)=\frac{1}{27}x^4+\frac{2}{9}x^3-2x-3$

Hier muss man sehr exakt zeichnen, sonst erkennt man die zu berechnende Fläche überhaupt nicht.

Die Integrationsgrenzen sind -6 und 0. In diesem Bereich liegt G_t *oberhalb von* G_f.

$$A=\int_{-6}^{0}\left[t(x)-f(x)\right]dx$$

Wir berechnen zunächst t(x)-f(x):

© FABI-Trainer

$$-2x-3-\left(\frac{1}{27}x^4+\frac{2}{9}x^3-2x-3\right)=-\frac{1}{27}x^4-\frac{2}{9}x^3$$

Wir finden eine Stammfunktion:

$$\int\left(-\frac{1}{27}x^4-\frac{2}{9}x^3\right)dx=\left[-\frac{1}{135}x^5-\frac{1}{18}x^4\right]$$

$$A=\int_{-6}^{0}\left[t(x)-f(x)\right]dx=\left[-\frac{1}{135}x^5-\frac{1}{18}x^4\right]_{-6}^{0}$$

$$=0-\left(-\frac{1}{135}\cdot(-6)^5-\frac{1}{18}\cdot(-6)^4\right)=14{,}4\ \ FE$$

3) AP 2006 AII 1.7 (adaptiert)

Gegeben ist die Funktion $f(x)=-\frac{1}{4}(x^2-4)^2+3$. Die Strecke $\left[H_1H_2\right]$ zwischen den beiden Hochpunkten und der Graph von f begrenzen ein Flächenstück.

Berechnen Sie dessen Inhalt.

Lösung:

Wir berechnen zunächst die Punkte H_1 und H_2, also die x-Werte der relativen Hochpunkte. Dazu leiten wir zweimal ab. Zunächst müssen wir aber ausmultiplizieren.

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x^4-8x^2+16)+3$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-4+3$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-1$$

$$f'(x)=-x^3+4x$$

$$f''(x)=-3x^2+4$$

Wir setzen $f'(x)=0$, also

$$-x^3+4x=0$$

$$x(-x^2+4)=0 \qquad x_1=0$$

$$-x^2=-4$$

$$x^2=4 \qquad x_2=2 \vee x_3=-2$$

Wir setzen in $f''(x)$ ein und erhalten

$f''(0) = 4 > 0 \qquad \Rightarrow \text{rel. Tiefpunkt}$

$f''(2) = -3 \cdot 4 + 4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{rel. Hochpunkt}$

$f''(-2) = -3 \cdot 4 + 4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{rel. Hochpunkt}$

Die Punkte H_1 *und* H_2 *haben also die x-Werte* $x_1 = 2$ *und* $x_2 = -2$.
Wir sehen uns das in einer Zeichnung an.

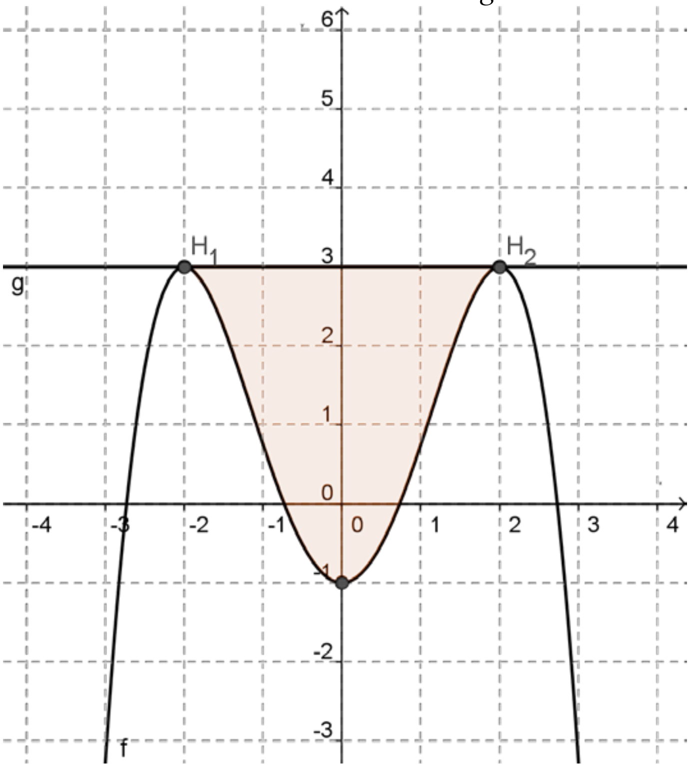

Abbildung 3: Funktionsgraph von $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 4)^2 + 3$

Die Gerade hat die Gleichung y=3

Da der Funktionsgraph symmetrisch zur y-Achse liegt, können wir von 0 bis 2 integrieren und dann die erhaltene Fläche verdoppeln.

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gerade}}}{3} - f(x)\right] dx$$

Wir berechnen zunächst

$$3 - f(x) = 3 - \left(-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 1\right) = 3 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$$

© FABI-Trainer

Wir bilden eine Stammfunktion:

$$\int\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+4\right)dx=\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{2}{3}x^3+4x\right]$$

$$A=2\cdot\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^2=2\cdot\left[\frac{1}{20}\cdot 2^5-\frac{2}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2-0\right]$$
$$=2\cdot\left[\frac{32}{20}-\frac{16}{3}+8\right]=8\frac{8}{15}$$

4) AP 2008 AII 2.4

Gegeben ist die Funktion $h(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3$. Der Graph G_h,

die y-Achse und die Tangente im Hochpunkt des Graphen schließen eine im I. Quadranten liegende Fläche ein.

Berechnen Sie deren Inhalt.

Lösung:

Wir müssen zunächst die Tangentengleichung im Hochpunkt bestimmen. Wir leiten zweimal ab:

$$h'(x)=-x^3+3x^2$$
$$h''(x)=-3x^2+6x$$

$h'(x)=0$, also $-x^3+3x^2=0$

$-x^2(x-3)=0$ $\quad x_{1/2}=0$ *(doppelte Lösung → kein rel. Extrema)*

$x_3=3$

$$h''(3)=-3\cdot 3^2+6\cdot 3=-27+18<0 \quad \Rightarrow \text{rel. Hochpunkt}$$

Den zugehörigen y-Wert erhalten wir durch Einsetzen in h(x), also

$$h(3)=-\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^3=6{,}75$$

Da die Steigung im rel. Hochpunkt 0 beträgt, ist die Tangentengleichung $t(x)=6{,}75$.

Es handelt sich um eine Parallele zur x-Achse. Wir sehen uns eine Zeichnung an.

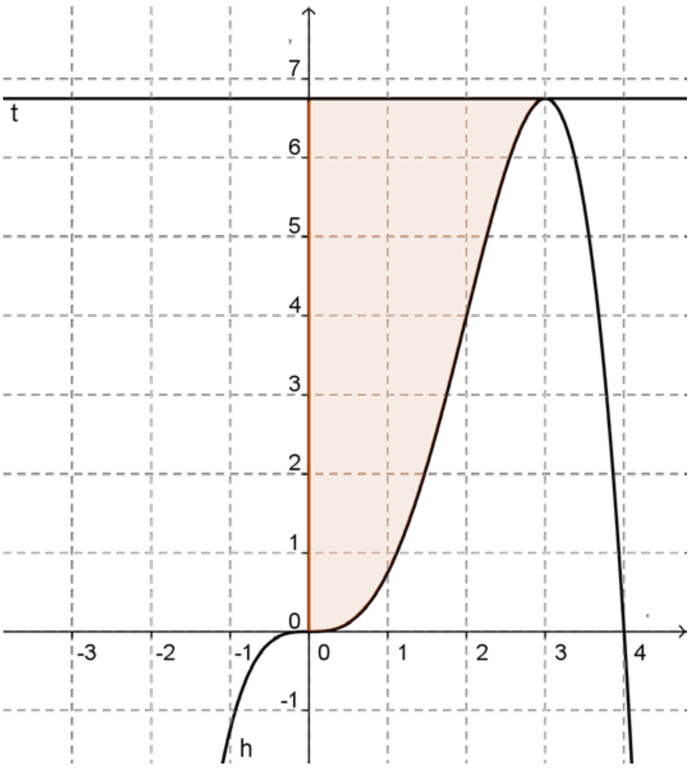

Abbildung 4: Funktionsgraph von $h(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

Oberhalb liegt also die Tangente.

$$A = \int_0^3 [t(x) - h(x)]dx$$

Wir berechnen zunächst t(x)-h(x), also

$$6{,}75 - \left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right) = 6{,}75 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 6{,}75$$

Wir bilden eine Stammfunktion

$\int\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 6{,}75\right)dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 6{,}75x\right]$ *und erhalten:*

$$A = \int_0^3 [t(x) - h(x)]dx = \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + 6{,}75x\right]_0^3 =$$

$$= \left[\frac{1}{20}\cdot 3^5 - \frac{1}{4}\cdot 3^4 + 6{,}75\cdot 3 - 0\right] = \frac{243}{20} = 12\,\frac{3}{20}$$

© FABI-Trainer

Abbildungsverzeichnis

MATHE FABI-Trainer

www.fabi-trainer.de

FABI-Trainer
Helmut Schedel
Georgstr. 9, 83512 Wasserburg am Inn
Tel. 08071/95486
info@fabi-trainer.de