Lösungen Teil IV

Inhalt

Aufgabenblock 1: 3

Lösung linearer Gleichungssysteme: 3

Aufgabe 1 3

Aufgabe 2 3

Aufgabe 3 4

Aufgabe 4 5

Aufgabenblock 2: 6

Aufstellen von Funktionsgleichungen 6

Aufgabe 1: (AP 1995 AII 3.1 (adaptiert)) 6

2. Aufgabe (AP 2006 AI 1.2) 7

3. Aufgabe (AP 2007 AII 3) 9

4. Aufgabe (von Kathrin Baumgarten) 10

Aufgabenblock 3 12

Extremwertaufgaben 12

1. Aufgabe (AP 2008 AI 4) 12

2. Aufgabe (AP 2005 AI 4) 14

3. Aufgabe (AP 2008 AII 4) 16

Aufgabenblock 4 20

Abschnittsweise-definierte Funktionen 20

1. Aufgabe (AP 2005 AII 1.8) 20

2. Aufgabe (AP 2011 AI 4) 21

3. Aufgabe (AP 1998 A I, Nr. 4 (adaptiert)) 23

© FABI-Trainer Verlag

Aufgabenblock 1:

Lösung linearer Gleichungssysteme:

Aufgabe 1

Es handelt sich um ein GLS mit nur zwei Unbekannten, nämlich a und b.

Wir lösen die II. Gleichung nach a auf und erhalten:

$$-a = -10 + 6b \quad /\cdot(-1)$$
$$a = 10 - 6b \quad (*)$$

Dann ersetzen wir das a in I durch $(*)$:

$$2\cdot(10-6b)+7b = 11$$
$$20 - 12b + 7b = 11 \quad /-20$$
$$-5b = -9 \quad /:(-5)$$
$$b = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

$$a = 10 - 6b = 10 - 6\cdot\frac{9}{5} = -\frac{4}{5} = -0{,}8$$

Das GLS besitzt also die eindeutige Lösung $a = -0{,}8$ und $b = 1{,}8$

Aufgabe 2

Vor eine der Unbekannten bringen wir dieselbe Zahl, am einfachsten ist hier x. Dazu multiplizieren wir II und III jeweils mit 2:

$$(I) \quad 2x - 4y + 3z = 0$$
$$(II) \quad x - 3y + 4z = 0 \quad /\cdot 2$$
$$(III) \; -x + y + 2z = 0 \quad /\cdot 2$$

und erhalten:

$$(I) \quad 2x - 4y + 3z = 0$$
$$(II) \quad 2x - 6y + 8z = 0$$
$$(III) \; -2x + 2y + 4z = 0$$

Um x zu eliminieren, addieren wir (I+III) und (II+III)

$$(I + III): \quad -2y + 7z = 0$$
$$(II + III): \quad -4y + 12z = 0$$

Wir multiplizieren die obere Gleichung mit 2 und erhalten:

© FABI-Trainer Verlag

$1': \quad -4y+14z=0$
$2': \quad -4y+12z=0$

Diese beiden Gleichungen subtrahieren wir voneinander:

$1'-2': \quad 2z=0 \quad \Rightarrow z=0$

in $1': \ -4y=0 \quad \Rightarrow y=0$

in $I: \quad 2x=0 \quad \Rightarrow x=0$

Das GLS hat die Lösung $x=y=z=0$

Aufgabe 3

Wir lösen zunächst die Gleichungen (I) und (II) eindeutig nach a und b auf, indem wir addieren:

$(I)+(II) \quad 5a=5 \Rightarrow a=1$

$in\ II: 2\cdot 1-2b=4$
$2-2b=4$
$-2b=2$
$b=-1$

a und b in III:

$1-3\cdot(-1)-2c=-1$
$1+3-2c=-1$
$-2c=-5$
$c=\frac{5}{2}=2{,}5$

Das GLS hat die Lösung $a = 1; b = -1; c = 2{,}5$

© FABI-Trainer Verlag

Aufgabe 4

Vor einer Unbekannten bringen wir dieselbe Zahl, hier bietet sich nichts wirklich an, wir wählen b:

$(I)\quad 4a+2b-7c=-3 \quad /\cdot 15$
$(II)\quad 3a-5b+6c=-1 \quad /\cdot 6$
$(III)\quad 5a+3b-4c=13 \quad /\cdot 10$

und erhalten:

$(I)\quad 60a+30b-105c=-45$
$(II)\quad 18a-30b+36c=-6$
$(III)\quad 50a+30b-40c=130$

$(I+II): 78a-69c=-51(*)$

$(II+III): 68a-4c=124 \Rightarrow c=\frac{124-68a}{-4}=-31+17a$

in $(*)$ eingesetzt:

$78a-69\cdot(-31+17a)=-51$
$78a+2139-1173a=-51$
$-1059a=-2190$
$a=2$
$c=-31+17\cdot a=-31+17\cdot 2=3$

a und c in *(I)*:

$4\cdot 2+2b-7\cdot 3=-3$
$8+2b-21=-3$
$2b=10$
$b=5$

Das GLS hat also die Lösungen $a=2$, $b=5$ und $c=3$

© FABI-Trainer Verlag

Aufgabenblock 2:

Aufstellen von Funktionsgleichungen

Aufgabe 1: (AP 1995 AII 3.1 (adaptiert))

Zunächst stellen wir die quadratische Funktion in ihrer allgemeinen Form dar: $p(x)=ax^2+bx+c$

Wir müssen die Parameter a, b und c bestimmen und benötigen demnach 3 Bedingungen um dann die Gleichungen bilden zu können.

1. Bedingung: G_p verläuft durch den Koordinatenursprung, enthält also den Punkt $P(0/0)$,
   $\boxed{p(0)=0}$
2. Bedingung: G_p berührt G_f in $x=4$. Diesen Punkt enthalten also beiden Graphen. Da W auf G_f liegt, lässt sich der y-Wert bestimmen, indem man $f(4)$ berechnet:
   $$f(4)=\frac{1}{4}\left(4^3-12\cdot 4^2+36\cdot 4\right)=\frac{1}{4}(64-96+144)=4$$
   $\boxed{p(4)=f(4)}$
3. Bedingung: Die Graphen berühren sich in $x=4$. Damit haben sie an dieser Stelle die gleiche Steigung. Für die Steigung ist jeweils die 1. Ableitung maßgeblich.
   $\boxed{p'(4)=f'(4)}$

In einer Nebenrechnung bestimmen wir zunächst $p'(x)=2ax+b$

$$f'(x)=\frac{1}{4}(3x^2-24x+36)$$
$$f'(4)=\frac{1}{4}(3\cdot 4^2-24\cdot 4+36)=\frac{1}{4}\cdot(-3)=-\frac{3}{4}$$

Jetzt können wir aus den 3 Bedingungen 3 Gleichungen bilden:

$(I)\,p(0)=0$	$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0$
$(II)\,p(4)=f(4)=4$	$a\cdot 4^2+b\cdot 4+c=0$
$(III)\,p'(4)=f'(4)=-\frac{3}{4}$	$2a\cdot 4+b=-\frac{3}{4}$

© FABI-Trainer Verlag

Wir erhalten ein lineares GLS von Grad 3:

$$(I) \qquad c = 0$$
$$(II) \; 16a + 4b + 0 = 0$$
$$(III) \; 8a + b = -\frac{3}{4}$$

Da c=0 bekannt, lösen wir beispielsweise III nach b auf und setzen den erhaltenen Ausdruck in II.

$$8a + b = -\frac{3}{4}$$
$$b = -\frac{3}{4} - 8a$$

In II: $16a + 4\left(\underbrace{-\frac{3}{4} - 8a}_{b}\right) = 0$

$$16a - 3 - 32a = 0$$
$$-16a = 3$$
$$a = -\frac{3}{16}$$

In III: $b = -\frac{3}{4} - 8 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Die Parabelgleichung ist also $p(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$

2. Aufgabe (AP 2006 AI 1.2)

Normalform $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir benötigen 4 Parameter (a, b, c und d) und daher 4 Bedingungen.

1. und 2. Bedingung: Die Funktion hat den Wendepunkt $W(0/5)$.
   Hieraus ergeben sich 2 Bedingungen:
   $h''(0) = 0$ (sonst wäre es kein WP)
   und $h(0) = 5$ (der Graph enthält den Punkt W)

© FABI-Trainer Verlag

3. Bedingung: Der Punkt $P(1/8)$ liegt auf G_h, also $h(1) = 8$
4. Bedingung: Die Wendetangente enthält $Q(-1{,}25/0)$. Dies ist die schwierigste Bedingung. Wenn man die Gleichung der Wendetangente kennt, kennt man automatisch die Steigung im Wendepunkt. W und Q liegen auf der Wendetangente. Die Steigung ergibt sich aus $m = \frac{y_Q - y_W}{x_Q - x_W} = \frac{0-5}{-1{,}25-0} = 4$.
   Die Steigung im Wendepunkt ist demnach 4, also $h'(0) = 4$

$(I)\quad h''(0) = 0$
$(II)\quad h(0) = 5$
$(III)\quad h(1) = 8$
$(IV)\quad h'(0) = 4$

Wir bestimmen also zunächst

$h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$h''(x) = 6ax + 2b$

und erhalten 4 Gleichungen:

$(I)\quad 6a \cdot 0 + 2b = 0 \quad \Rightarrow b = 0$
$(II)\quad d = 5$
$(III)\quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 8$
$(III)\quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 4$

und hieraus:

$(I)\quad b = 0$
$(II)\quad d = 5$
$(III)\quad a + 0 + c + 5 = 8$
$(IV)\quad c = 4$

$(III)\quad a + c = 3$
$aus(IV): a + 4 = 3$
$a = -1$

Die gesuchte Funktion heißt $h(x) = -x^3 + 4x + 5$.

© FABI-Trainer Verlag

3. Aufgabe (AP 2007 AII 3)

$h(x)=ax^3+bx^2+3x+c$

Wir benötigen hier 3 Bedingungen für die Unbekannten a, b und c.

1. Bedingung: G_h schneidet G_f auf der y-Achse. Alle Punkte, die auf der y-Achse liegen, haben den x-Wert 0. sie schneiden sich also an der Stelle x=0 und es gilt:
   $h(0)=f(0)$
2. und 3. Bedingung: An der Stelle $x=-2$ hat der Graph einen Terrassenpunkt. Daraus lassen sich zwei Bedingungen ableiten.
   $h'(-2)=0 \wedge h''(-2)=0$

Wir bilden zunächst

$h'(x)=3ax^2+2bx+3$
$h''(x)=6ax+2b$

Wir bilden 3 Gleichungen

$(I)\ h(0)=f(0)$ $\qquad$ $(I)\ a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+3\cdot 0+c=\frac{1}{8}\left(0^2-4\right)^2$

$(II)\ h'(-2)=0$ $\qquad$ $(II)\ 3a\cdot(-2)^2+2b\cdot(-2)+3=0$

$(III)\ h''(-2)=0$ $\qquad$ $(III)\ 6a\cdot(-2)+2b=0$

Vereinfacht:

$(I)\quad c=2$

$(II)\quad 12a-4b+3=0$

$(III)\quad -12a+2b=0$

Wir addieren II+III (dann fällt a weg)

$II+III:-2b+3=0\Rightarrow b=\frac{3}{2}$

© FABI-Trainer Verlag

b eingesetzt in III:

$$-12a + 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$$
$$-12a + 3 = 0$$
$$a = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Die gesuchte Funktion ist $h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2$

4. Aufgabe (von Kathrin Baumgarten)

$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Wir benötigen 3 Bedingungen für die Unbekannten a, b und c.

1. Bedingung: G_h enthält $P(2/-3)$, also $h(2) = -3$
2. Bedingung: G_h enthält $Q(4/3)$, also $h(4) = 3$
3. Bedingung: Die Tangente in $U(0/?)$ verläuft parallel zu der Geraden $9x + 4y = 0$.

Wir lösen die Geradengleichung nach y auf und „sehen" die Steigung:

$$4y = -9x$$
$$y = -\frac{9}{4}x$$

Die Steigung an der Stelle x=0 beträgt $-\frac{9}{4}$, also $h'(0) = -\frac{9}{4}$.

Wir benötigen nur eine Ableitung

$$h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$(I)\ h(2) = -3$	$(I)\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 = -3$
$(II)\ h(4) = 3$	$(II)\ a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 = 3$
$(III)\ h'(0) = -\frac{9}{4}$	$(III)\ 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = -\frac{9}{4}$

© FABI-Trainer Verlag

Vereinfacht:

$(I) \quad 8a + 4b + 2c = -3$

$(II) \quad 64a + 16b + 4c = 3$

$(III) \quad c = -\frac{9}{4}$

Wir setzen c in I und II ein

$(I) 8a + 4b - 4{,}5 = -3 \quad / + 4{,}5$

$(II) 64a + 16b - 9 = 3 \quad / + 9$

$(I) 8a + 4b = 1{,}5$

$(II) 64a + 16b = 12 \quad / \div 4$

$(I) 8a + 4b = 1{,}5$

$(II) 16a + 4b = 3$

$(II) - (I) : 8a = 1{,}5$

$a = \frac{3}{16}$

In (I): $8 \cdot \frac{3}{16} + 4b = 1{,}5$

$\frac{3}{2} + 4b = 1{,}5$

$b = 0$

Die gesuchte Funktion ist demnach $h(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x$

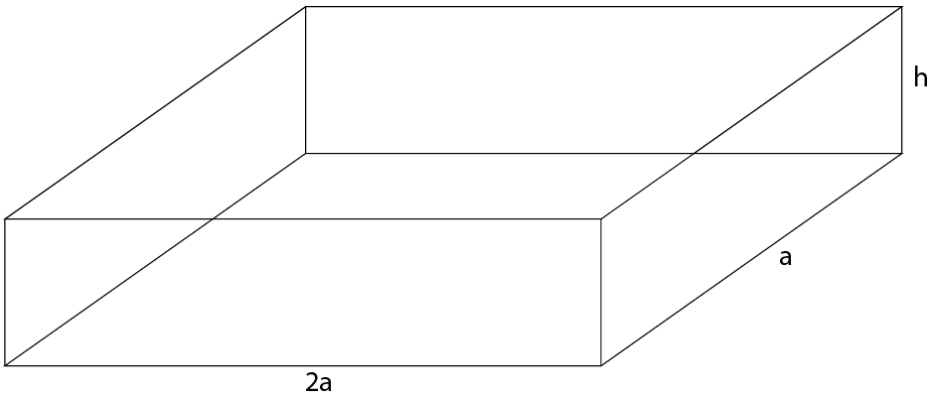
© FABI-Trainer Verlag

Aufgabenblock 3

Extremwertaufgaben

1. Aufgabe (AP 2008 AI 4)

Lösung: Wir zeichnen den Quader, um eine Vorstellung zu haben



Die Grundfläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $2a$ und a. Die Höhe des Quaders bezeichnen wir mit h.

Wir gehen nach unserem 8-Punkte-Plan vor.

1. Wir stellen die Zielfunktion auf. Diese enthält noch 2 Unbekannte, nämlich a und h.
   Das Volumen eines Quaders ist $V = l \cdot b \cdot h$

   $[l: Länge\ b: Breite\ h: Höhe]$

   Bei uns ist die Länge $l = 2a$ und die Breite $b = a$.

   Demnach gilt: $V(a;h) = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2 \cdot h$

2. Nun haben wir eine Nebenbedingung, nämlich, dass der Draht, aus dem der Quader geformt wird, 72 cm lang ist.
   Jede Seitenlänge kommt beim Quader 4mal vor.

   Es gilt also $4 \cdot (2a + a + h) = 72$

   $8a + 4a + 4h = 72$

   $12a + 4h = 72$

3. diese Nebenbedingung lösen wir nach h auf, weil wir das Volumen nur in Abhängigkeit von a angeben sollen, h muss demnach eliminiert werden.

   $4h = 72 - 12a \qquad / \div 4$

   $h = 18 - 3a$

© FABI-Trainer Verlag

4. Nun ersetzen wir h in der Zielfunktion und erhalten

   $V(a) = 2a^2 \cdot (18 - 3a) = 36a^2 - 6a^3$

5. a muss positiv sein, also $a > 0$.

   Wenn h ganz klein wird (also gegen null geht) dann ist

   $12a + 4h = 72$

   $12a = 72 \quad (\text{h wird ganz, ganz klein})$

   $a = 6$

   Diesen Wert darf a aber nicht annehmen, sonst wäre h wirklich Null und wir hätten keinen Quader.

   $a \in]0;6[$

6. Um zunächst das relative Extremum zu finden leiten wir zweimal ab:

   $V'(a) = 72a - 18a^2$

   $V''(a) = 72 - 36a$

   Wir setzen $V'(a) = 0$, also

   $72a - 18a^2 = 0$

   $18a(4 - a) = 0 \qquad [a_1 = 0 \notin D_a]$

   $a_2 = 4$

   Diesen Wert setzen wir in $V''(a)$ ein, also $V''(4) = 72 - 36 \cdot 4 = -72 < 0$

   $\Rightarrow \text{rel.Maximum}$

   Wir berechnen das Volumen für diesen Wert:

   $V(4) = 36 \cdot 4^2 - 6 \cdot 4^3 = 192$

7. Nun führen wir die RWU durch

   $\lim\limits_{a \to 0} V(a) = \lim\limits_{a \to 0} (36a^2 - 6a^3) = 0$

   $\lim\limits_{a \to 6} V(a) = \lim\limits_{a \to 6} (36a^2 - 6a^3) = 0$

8. Das relative Maximum ist also gleichzeitig das absolute Maximum.

   $V_{max} = 192$

© FABI-Trainer Verlag

2. Aufgabe (AP 2005 AI 4)

Die schraffierte Querschnittsfläche besteht aus einem Rechteck und zwei Viertelkreisen, also 1 Rechteck und 1 Halbkreis.

Wir gehen wieder nach unserem 8-Punkte-Plan vor.

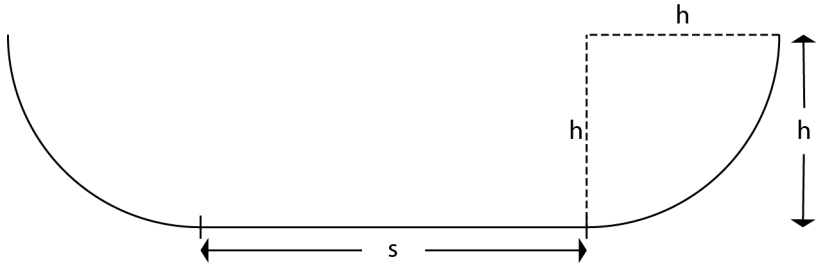
1. Die Zielfunktion enthält zunächst noch 2 Unbekannte.

   $A = A_{Rechteck} + A_{Halbkreis}$ Wir benötigen folgende „Formeln“:

   $A = s \cdot h + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot \pi$ $\qquad A_0 = r^2\pi$

   $U_0 = 2\pi r$

   Der Kreisradius ist h , dies sieht man in dieser Zeichnung besser.



2. Die Nebenbedingung ist, dass der Umfang 5 LE (=Längeneinheiten) beträgt. Der Umfang setzt sich aus 2 Viertelkreisbögen (= 1 Halbkreis) und Strecke s zusammen:

   $U = \frac{1}{2} \cdot (2\pi r) + s$

   Der Kreisradius ist bei uns h, also

   $5 = \frac{1}{2}(2\pi \cdot h) + s$

   $5 = \pi \cdot h + s$

3. Diese Gleichung lösen wir nach s auf, da man $A(h)$ angeben soll.

   $s = 5 - \pi \cdot h$

4. Wir ersetzen s in unserer Zielfunktion und erhalten:

   $A(h) = (5 - \pi \cdot h) \cdot h + \frac{1}{2} h^2 \pi$

   Dies vereinfachen wir zu

© FABI-Trainer Verlag

$$A(h) = 5h \underbrace{- h^2\pi + \frac{1}{2}h^2\pi}_{\text{zusammenfassen!}}$$

$$A(h) = 5h - \frac{1}{2}h^2\pi$$

5. h muss positiv sein, also $h > 0$.
   Es gilt $s = 5 - \pi \cdot h$

   Setzen wir $s = 0$, dann ist $0 = 5 - \pi \cdot h$

   $$5 = \pi \cdot h$$

   $$\frac{5}{\pi} = h$$

   Dieser Wert für h ist erlaubt, weil s durchaus 0 werden darf.

   Daher ist $D_A = \left]0;\frac{5}{\pi}\right]$

6. Wir suchen zunächst das relative Maximum und leiten hierzu zweimal ab, also

   $A'(h) = 5 - h\pi$

   $A''(h) = -\pi$

   Wir setzen $A'(h) = 0$, also

   $$5 - \pi \cdot h = 0$$

   $$-\pi \cdot h = -5 \quad / \div(-\pi)$$

   $$h = \frac{5}{\pi}$$

   Dieser Wert ist erlaubt.

   $$A''\left(\frac{5}{\pi}\right) = -\pi < 0 \quad \Rightarrow \text{relativesMaximum}$$

   Wir berechnen $A\left(\frac{5}{\pi}\right) = 5 \cdot \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot \pi$

   $$A\left(\frac{5}{\pi}\right) = \frac{25}{\pi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{\pi^2} \cdot \pi$$

   $$A\left(\frac{5}{\pi}\right) = \frac{25}{\pi} - \frac{12{,}5}{\pi} = \frac{12{,}5}{\pi}$$

© FABI-Trainer Verlag

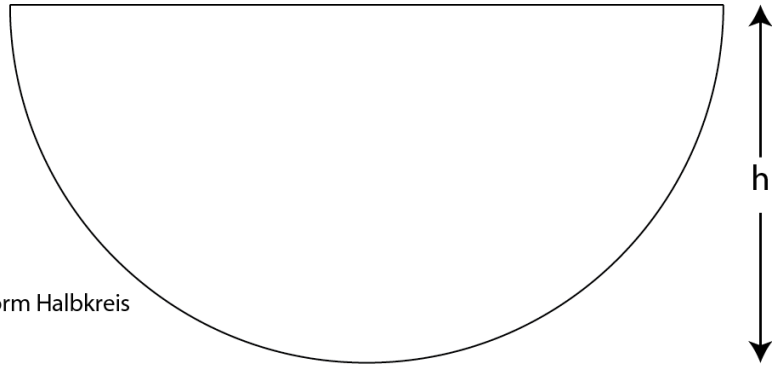
7. Die RWU muss nur an einem Rand durchgeführt werden, da $h = \frac{5}{\pi}$ den rechten Rand beendet.

$$\lim_{h \to 0} A(h) = \lim_{h \to 0} 5h - \frac{1}{2}h^2\pi = 0$$

8. $\Rightarrow A_{max} = \frac{12{,}5}{\pi}$ für $h = \frac{5}{\pi}$

Zusätzlich möchte man für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche.

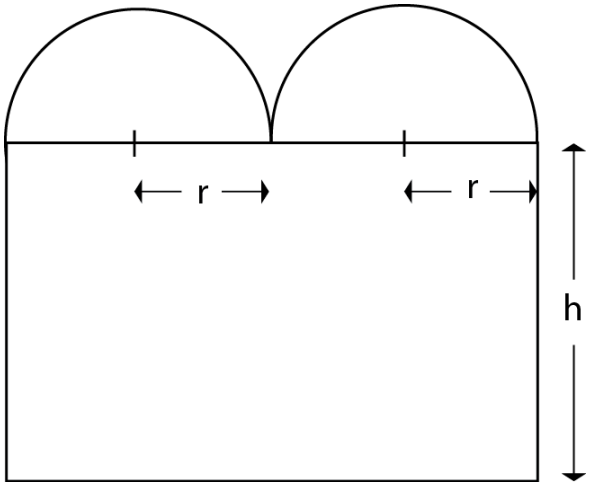
Aus 5. wissen wir: Wenn $h = \frac{5}{\pi}$, dann ist s=0. Das sieht dann so aus.



Form Halbkreis

Die Form ist also ein Halbkreis.

3. Aufgabe (AP 2008 AII 4)



© FABI-Trainer Verlag

Wir gehen wieder nach unserem 8-Punkte-Plan vor.

1. Die Fläche des Fensters setzt sich zusammen aus einem Rechteck und 2 Halbkreisen, also 1 Rechteck und 1 Kreis

   $A(r;h) = h \cdot 4r + r^2\pi$

   Die eine Rechteckseite ist $r + r + r + r = 4r$

2. die Nebenbedingung sagt, dass der Umfang des Fensters 10 m beträgt.

   $U = h + 4r + h + U_{Kreis}$

   $U = h + 4r + h + 2\pi r$

   $10 = 2h + 4r + 2\pi r$

3. Diese Nebenbedingung lösen wir nach h auf, da A in Abhängigkeit von r angegeben werden soll, also

   $10 - 4r - 2\pi r = 2h \qquad / \div 2$

   $5 - 2r - \pi r = h$

4. Diesen Ausdruck setzen wir an Stelle von h in die Zielfunktion ein, also

   $A(r) = \underbrace{(5 - 2r - \pi r)}_{h} \cdot 4r + r^2\pi$

   Wir vereinfachen:

   $A(r) = 20r - 8r^2 \underbrace{- 4\pi r^2 + r^2\pi}_{\text{zusammenfassen}}$

   $A(r) = 20r - 8r^2 - 3\pi r^2$

5. Ein sinnvoller Definitionsbereich ergibt sich aus:
   R muss positiv sein (sonst hätten wir keine „Breite“ des Fensters), also

   $r > 0$.

   Aus der Nebenbedingung erhalten wir den rechten Rand. Wenn

   $h \to 0$ geht (h darf nicht 0 werden, sonst wäre unter den beiden Halbkreisen kein Rechteck, was aber in der Angabe steht!), dann ist

   $h = 5 - 2r - \pi r$ (Nebenbedingung)

   $0 = 5 - 2r - \pi r$

© FABI-Trainer Verlag

$$-5 = -2r - \pi r$$
$$-5 = r(-2-\pi) \qquad /\div(-2-\pi)$$
$$\frac{-5}{-2-\pi} = r$$
$$\frac{-5}{-(2+\pi)} = r$$
$$r = \frac{5}{2+\pi}$$

Dieser Wert ist aber nicht in D_A enthalten.

$$D_A = \left]0;\frac{5}{2+\pi}\right[$$

6. Wir bestimmen zunächst das rel. Maximum und leiten hierzu zweimal ab.

$A'(r) = 20 - 16r - 6\pi r$

$A''(r) = -16 - 6\pi$

$A'(r) = 0$, also $\quad 20 - 16r - 6\pi r = 0$

$$-16r - 6\pi r = -20$$
$$r(-16 - 6\pi = -20$$
$$r = \frac{-20}{-(16+6\pi)} = \frac{20}{16+6\pi} \overset{\div 2}{=} \frac{10}{8+3\pi}$$

In $A''(r)$ eingesetzt,

$$A''\left(\frac{10}{8+3\pi}\right) = \underbrace{-16-6\pi}_{konstant!} < 0 \qquad \Rightarrow \text{relatives Maximum}$$

Wir berechnen die Fensterfläche, wenn $r = \frac{10}{8+3\pi}$:

$$A\left(\frac{10}{8+3\pi}\right) = 20\cdot\frac{10}{8+3\pi} - 8\cdot\left(\frac{10}{8+3\pi}\right)^2 - 3\pi\cdot\left(\frac{10}{8+3\pi}\right)^2 \approx 5{,}739$$

Tipp: Hier wäre es vielleicht einfacher den Wert $\frac{10}{8+3\pi}$ *zu runden. Es gilt.*

$$\frac{10}{8+3\pi} \approx 0{,}574$$

7. Die RWU ergibt:

© FABI-Trainer Verlag

$\lim\limits_{r \to 0} A(r) = 0$

$\lim\limits_{r \to \frac{5}{2+\pi}} A(r) = 0$

8. Die Fensterfläche wird also für $r = 0{,}574$ am größten.
   Zusätzlich ist hier nach den prozentualen Anteil der Rechtecksfläche an der Gesamtfläche gefragt.

   $A_{gesamt} = 5{,}739$

   $A_{Rechteck} = 4r \cdot h$

   $h = 5 - 2r - \pi r$ (Nebenbedingung)

   Für $r = 0{,}574$ ergibt sich:

   $h = 5 - 2 \cdot 0{,}574 - \pi \cdot 0{,}574 = 2{,}049$

   $A_{Rechteck} = 4 \cdot 0{,}574 \cdot 2{,}049 = 4{,}705$

   Prozentualer Anteil: $\frac{4{,}705}{5{,}739} = 0{,}82 = 82\%$

© FABI-Trainer Verlag

Aufgabenblock 4

Abschnittsweise-definierte Funktionen

1. Aufgabe (AP 2005 AII 1.8)

Stetigkeit: Zu zeigen ist: $g(0)=\lim\limits_{h\to 0} g(0+h)=\lim\limits_{h\to 0} g(0-h)$

$g(0)=0$

$$\lim_{h\to 0} g(0+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{4}\cdot\underbrace{(0+h)^2}_{\to 0}-\underbrace{(0+h)}_{\to 0}\right]=0$$

$$\lim_{h\to 0} g(0-h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{16}\underbrace{(0-h)^4}_{\to 0}-2\underbrace{(0-h)}_{\to 0}\right]=0$$

⇨ Die Funktion ist an der Nahtstelle stetig.

Differenzierbarkeit: Zu zeigen ist: $\lim\limits_{h\to 0} g'(0+h)=\lim\limits_{h\to 0} g'(0-h)$

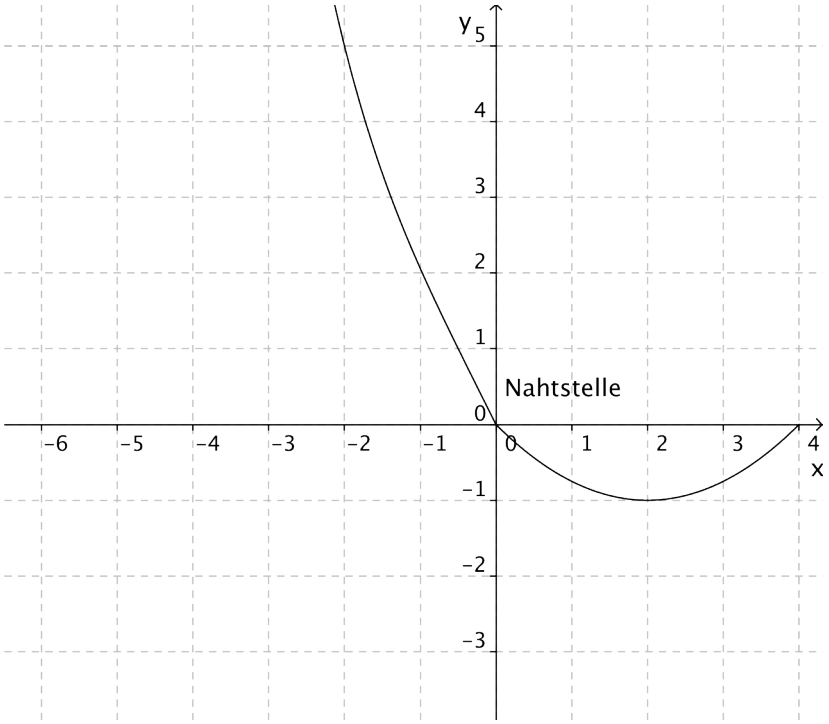
$$\lim_{h\to 0} g'(0+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2}\underbrace{(0+h)}_{\to 0}-1\right]=-1$$

$$\lim_{h\to 0} g'(0-h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{4}\underbrace{(0-h)^3}_{\to 0}-2\right]=-2$$

Die Werte stimmen nicht überein, der Graph hat also an dieser Stelle einen „Knick“.

Dies sieht man hier:

© FABI-Trainer Verlag



2. Aufgabe (AP 2011 AI 4)

Da die Stetigkeit eine notwendige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit ist, muss zunächst die Stetigkeit nachgewiesen werden.

$$\lim_{h\to 0} h(-1+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{4}{9}\underbrace{(-1+h)^2}_{\to 1} - 4\underbrace{(-1+h)}_{\to -1} + 4\right] = \frac{4}{9}(1+4+4) = 4$$

$$\lim_{h\to 0} h(-1-h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{9}\left(\underbrace{(-1-h)^3}_{\to -1} + \underbrace{(-1-h)^2}_{\to 1} - 16\underbrace{(-1-h)}_{\to -1} + 20\right)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[(-1)+1+16+20\right] = 4$$

$$h(-1) = \frac{4}{9}\left((-1)^2 - 4(-1) + 4\right) = \frac{4}{9}\cdot 9 = 4$$

⇨ Die Funktion ist stetig

Differenzierbarkeit:

© FABI-Trainer Verlag

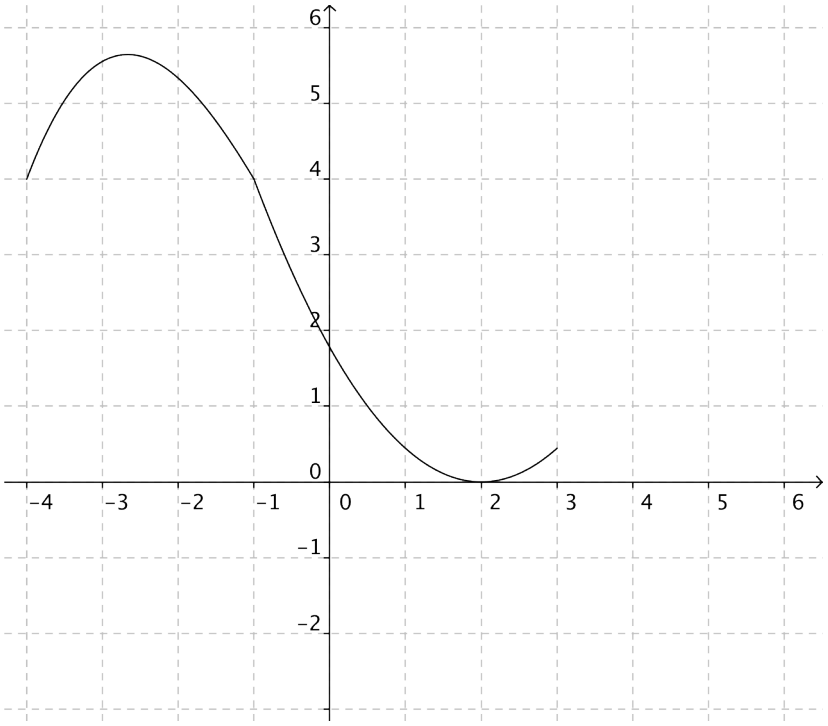
$$h'(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}(3x^2+2x-16) & \text{für } x<-1\\ \frac{4}{9}(2x-4) & \text{für } x>-1\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}h'(-1+h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{4}{9}\underbrace{(2(-1+h)-4)}_{\to -6}\right]=\frac{4}{9}\cdot(-6)=-\frac{24}{9}=-\frac{8}{3}$$

$$\lim_{h\to 0}h'(-1-h)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{9}(3\underbrace{(-1-h)^2}_{\to 1})+2\underbrace{(-1-h)}_{\to -1}-16)\right]=$$

$$\frac{1}{9}\cdot[3\cdot 1+2\cdot(-1)-16]=\frac{1}{9}\cdot(-15)=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$$

Die Werte stimmen nicht überein, die Funktion ist an der Nahtstelle $x_0=-1$ nicht differenzierbar.



© FABI-Trainer Verlag

3. Aufgabe (AP 1998 A I, Nr. 4 (adaptiert))

Stetigkeit:

$$\lim_{h\to 0} g(2+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{8}\underbrace{(2+h)^3}_{\to 8} - \frac{3}{4}\underbrace{(2+h)^2}_{\to 4}) + 4\right] = 1-3+4 = 2$$

$$\lim_{h\to 0} g(2-h) = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{3}{8}\underbrace{(2-h)^2}_{\to 4} + \frac{7}{2}\right] = -\frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 2$$

$$g(2) = 1-3+4 = 2$$

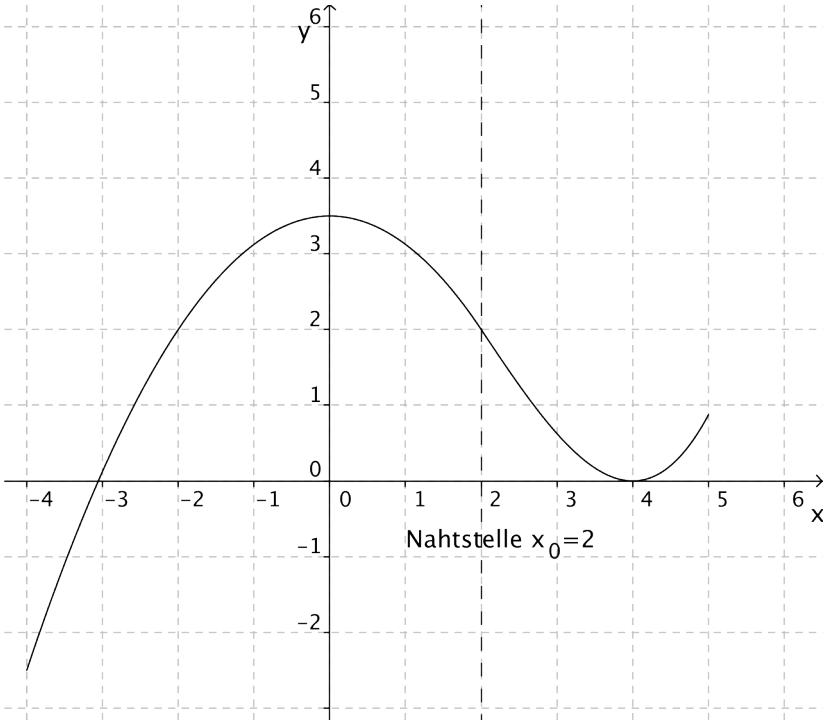
Die Funktion ist stetig!

Differenzierbarkeit:

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}x & \text{für } x > 2 \\ -\frac{3}{4}x & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0} g'(2+h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{3}{8}\underbrace{(2+h)^2}_{\to 4} - \frac{3}{2}\cdot 2\right] = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{h\to 0} g'(2-h) = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{3}{4}\underbrace{(2-h)}_{\to 2}\right] = -\frac{3}{2}$$

Die Funktion ist differenzierbar.

© FABI-Trainer Verlag