MATHE BASICS

GRUNDLAGEN DER ALGEBRA

Kompakt. Kompetent. Kostengünstig.

Bestellungen nur direkt bei
FABI-Trainer
Georgstr. 9, 83512 Wasserburg am Inn
Tel. 08071/95486

einfach bestellen in unserem Online-Shop
oder per E-Mail
bestellung@fabi-trainer.de

Verfasser

Hans Steinack, StD a.D.
Berufliche Oberschule Wasserburg am Inn

„Werfen Sie alle (eventuell vorhandenen) mathematischen Minderwertigkeitsgefühle („In Mathe war ich einfach immer schon schlecht…“) über Bord - es stimmt nicht.“

Mahte Basics Umschlag.indd 2 18.06.13 15:47

0 Vorbemerkung

Diese Wiederholung wichtiger algebraischer Grundlagen wendet sich an alle, die sich schon einmal mit diesem Thema befassen mussten, damals wenig Lust oder auch wenig Erfolg hatten und es heute entweder endlich wissen wollen oder aus anderen Gründen an dem Thema nicht vorbeikommen. Er eignet sich sowohl zur Unterrichtsbegleitung als auch zum selbstständigen Wiederholen und Ergänzen mathematischer Fertigkeiten. Ein paar Ratschläge vorab:

1. Werfen Sie alle (eventuell vorhandenen) mathematischen Minderwertigkeitsgefühle („In Mathe war ich einfach immer schon schlecht…") über Bord - **es stimmt nicht.**

2. Suchen Sie sich sowohl für die Vorbereitung als auch für Ihren Unterricht an der FOS selbst gleichgesinnte Mitstreiterinnen oder Mitstreiter. Gemeinsam lernen macht immer mehr Spaß als alleine, und mit Teamarbeit kommen Sie weiter als durch Einzelkampf; außerdem merkt jede(r) in tröstlicher Weise, dass die anderen ebenfalls Schwächen, aber auch ebenfalls Stärken haben, von denen Sie wiederum profitieren können.

3. Fragen Sie sich gegenseitig und **vor allem im Unterricht den Lehrer (die Lehrerin) alles**, was Sie mathematisch wissen wollen, oder zeigen Sie sofort an, wenn Sie „abgehängt" wurden. **Laufend. Immer wieder. Auch und gerade dann, wenn es anstrengt.** Das gehört zu der persönlichen Leistung, die **nur Sie** erbringen können. Raus aus der Deckung. Keine Lehrkraft kann Ihnen nämlich ansehen, ob Sie wenig, viel, alles oder gar nichts verstanden haben. Übrigens: Meist interessiert das, was Sie wissen wollten, mindestens noch die Hälfte der Mitschüler. Und wenn der Unterricht etwas zu schnell sein sollte, wird er durch Ihre Fragen automatisch langsamer. ☺

4. Machen Sie sich (evtl. mit Ihren Mitstreitern und Mitstreiterinnen) einen festen, realistischen Zeitplan, den Sie unter allen Umständen einhalten. Sollten Sie nach diesem Plan am Ende 70 bis 80 Prozent dessen, was Sie sich vorgenommen haben, schaffen, dann ist das ein sehr guter Anfang.

5. Machen Sie ruhig auch Fehler. Wer gar keine Fehler macht, lernt nichts.

6. Machen Sie sich einerseits **gründlich** mit Ihrem Taschenrechner vertraut (möglichst noch vertrauter als mit Ihrem Handy ☺) **und rechnen Sie andererseits trotzdem möglichst vieles im Kopf nach**, wenigstens bis zu einem ungefähren Ergebnis, damit Sie abschätzen können, ob das Ergebnis im Display des Taschenrechners überhaupt plausibel ist. Der Taschenrechner ist nicht besser als die Person, die ihn bedient. Gegen Bedienungs- oder Tippfehler ist er machtlos. Was Sie unbedingt können sollten, ist das **kleines Einmaleins.** Im Kopf.

7. Nehmen Sie die mathematische Symbolik ernst. Schlagen oder fragen Sie **jedes** Zeichen, dessen Bedeutung Ihnen unklar ist, sofort nach (z.B. im Glossar auf Seite 51f). In der mathematischen Darstellung wird ja fast alles so weit als möglich abgekürzt; das ist eventuell für Sie (wieder-) gewöhnungsbedürftig.

8. Das Konzept setzt voraus, dass Sie einerseits die folgenden Themen schon einmal behandelt, andererseits aber vieles vergessen oder noch nicht so ganz verstanden haben. Es werden Ihnen also wesentliche Dinge noch einmal von vorne erklärt.

1. Zahlen und Zahlenmengen, Zahlengerade, Darstellung von Mengen, einfache Mengensymbole

Es gibt unendlich viele Zahlen. Gerade Zahlen, negative Zahlen („Minuszahlen"), Zahlen, die sich nur durch sich selbst oder durch 1 teilen lassen (diese heißen Primzahlen), Zahlen, die bei Division durch 7 immer den Rest 1 lassen (das wären die Zahlen 1, 8, 15, 22…), Bruchzahlen, usw.

Um Ordnung in diese Vielfalt zu bekommen, erhält jede Zahl einen Platz auf der so genannten **Zahlengeraden** (Seite 5).

Zahlen mit gemeinsamen Eigenschaften werden zu **Zahlenmengen** zusammengefasst; diese Zahlenmengen erhalten bestimmte Namen. Solche Mengen werden entweder durch mit einem zusätzlichen Balken versehene Großbuchstaben (z. B. $\mathbb{N}$) bezeichnet; oder - falls es möglich ist, die einzelnen Elemente (also die Mitglieder der Menge) vollständig oder andeutungsweise aufzuzählen - werden die Elemente der Menge in geschweifte Klammern gesetzt und die einzelnen Elemente durch Strichpunkte voneinander getrennt.

Beispiele:
{Oslo; Kopenhagen; Helsinki; Stockholm} ist die Menge aller skandinavischen Hauptstädte;
{3; 6; 9; 12; 15; 18} ist die Menge aller Zahlen, die durch drei teilbar und kleiner als 20 sind.

1.1 Wichtige Zahlenmengen

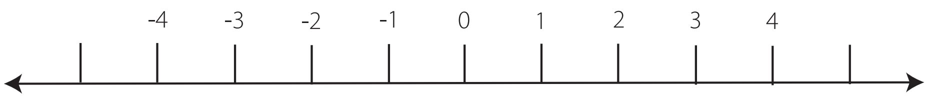
$\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}$:
Dies ist die Menge aller Zahlen, die Sie beim Zählen von einzelnen Gegenständen, Personen etc. benutzen, also die Zahlen 1, 2, 3, 4, usw. Diese Menge heißt **Menge der natürlichen Zahlen** und wird mit $\mathbb{N}$ symbolisiert. Es gilt also $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$. Diese Menge hat bereits unendlich viele Elemente (die drei Punkte hinter der Zahl 3 bedeuten, dass nach jeder natürlichen Zahl immer wieder eine weitere kommt, also z. B. kommt nach der Zahl 3 die Zahl 4 oder nach der Zahl 124.000.763 die Zahl 124.000.764).
Soll bei der Menge $\mathbb{N}$ auch noch die Zahl 0 mit dabei sein, so gilt das Symbol $\mathbb{N}_0$; also $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

Die Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}$:

Sie entsteht, wenn Sie die negativen ganzen Zahlen -1, -2, -3 usw. noch zu $\mathbb{N}_0$ mit da zunehmen. Es gilt also $\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$. Denken Sie sich die Zahlengerade als unendlich lange Straße, so markieren die ganzen Zahlen sozusagen die einzelnen Alleebäume. $\mathbb{Z}$

Darstellung auf der Zahlengeraden:



Zwischen diesen Zahlen gibt es sehr große Zwischenräume. Diese werden durch die Bruchzahlen, also etwa $\frac{3}{4}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{5}$, 4,7 usw. ausgefüllt; es entsteht die $\mathbb{Q}$

Menge der rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$):

Das sind in der Mathematik alle positiven und negativen Zahlen, die sich in Bruchform, also $\frac{a}{b}$, darstellen lassen, also auch die endlichen Dezimalzahlen wie etwa 0,53 oder -7,802. Die Menge aller rationalen Zahlen wird durch ein $\mathbb{Q}$ dargestellt. Hier handelt es sich sozusagen um die vielen, vielen hundert Millionen Grashalme zwischen den Alleebäumen. Natürlich sind in der Menge $\mathbb{Q}$ auch die ganzen Zahlen mit enthalten, denn jede natürliche Zahl lässt sich auch als Bruch darstellen; so lässt sich etwa die Zahl 12 auch in der Form $\frac{24}{2}$ schreiben.

Zwischen diesen rationalen Zahlen, also sozusagen den Grashalmen, ist aber (erstaunlicherweise) immer noch Platz.

Es gibt nämlich Zahlen, die sich nicht in der Form $\frac{a}{b}$ darstellen lassen, etwa die Zahl $\sqrt{5} \approx 2{,}23\ldots$oder die Kreiszahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ (es handelt sich hier um unendliche, nichtperiodische Dezimalzahlen). Diese Zahlen (sie heißen Irrationalzahlen) füllen die noch verbleibenden Zwischenräume, also die Räume „zwischen den Grashalmen", vollständig aus.

Die Menge aller Zahlen auf der Zahlengerade (also ganze, rationale und irrationale Zahlen) heißt die Menge der reellen Zahlen, und das Symbol dafür ist $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$

Was sollten Sie sich unbedingt davon merken?

Es sind die Mengensymbole $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$,

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ und $\mathbb{R}$ (die Menge aller Zahlen auf der Zahlengeraden). Die Menge $\mathbb{Q}$ ist in diesem Zusammenhang nicht sooo wichtig.

1.2 Umgang mit Mengensymbolen

Die einzelnen Mitglieder einer Menge, in diesem Fall also die Zahlen, heißen **Elemente**. Um auszudrücken, dass eine Zahl zu einer Menge gehört, benützt man das Zeichen $\in$. Es bedeutet „ … ist ein Element der Menge …" oder „…gehört zur Menge…"; es gilt also zum Beispiel: $4 \in \mathbb{N}$.

Das gegenteilige Zeichen ist das durchgestrichene $\in$, also $\notin$. Es ist also richtig zu schreiben: $\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$, denn $\frac{3}{7}$ ist keine natürliche Zahl.

Übung 1

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr (richtig) und welche falsch sind:

1. $203 \in \mathbb{N}$
2. $\frac{1}{6} \in \mathbb{Z}$
3. $\sqrt{6} \in \mathbb{N}$
4. $\sqrt{25} \notin \mathbb{N}$
5. $\frac{45}{5} \notin \mathbb{N}$
6. $3{,}14159 \in \mathbb{R}$

1.3 Anordnung und Größenvergleich der Zahlen auf der Zahlengeraden, die Symbole $<$, $>$, $\geq$, $\leq$

Das Zeichen „$<$ " bedeutet „ … ist kleiner als…", also „Die links vom Symbol stehende Zahl ist kleiner als die rechts stehende", also z. B. $2 < 5$.

Merkregel: *auf der Seite, wo die Spitze des Zeichens ist, wo es also „kleiner" ist, steht auch die kleinere Zahl, und dort, wo es auseinandergeht, also „größer" ist, steht die größere Zahl.*

Deutung auf der Zahlengeraden: Die größere Zahl hat ihren Platz auf der Zahlengeraden immer weiter rechts als die kleinere).
Also gilt auch $-6 < 3$ oder $-9 < -7$.
Umgekehrt bedeutet das Zeichen „ $>$ " so viel wie „ist größer als" („Die links vom Zeichen stehende Zahl ist größer als die rechts stehende" oder „Die links stehende Zahl hat ihren Platz auf der Zahlengeraden weiter rechts als die rechts stehende", also etwa $4 > 1$ oder $2 > -100$ oder $0 > -6$).

Bei den Zeichen $\geq$ bzw. $\leq$ ist die Gleichheit der Zahlen auch zugelassen; wenn also $a \leq b$ geschrieben steht (sprich: a ist kleiner oder gleich b), so kann a links von b stehen, a und b können auch gleich sein, aber a ist keinesfalls größer als b (analog natürlich $a \geq b$).

Möchte man drei oder mehr Zahlen der Größe nach anordnen, so kann man dies in einer Ungleichungskette schreiben. Je weiter rechts in der Kette die Zahl auftritt, desto größer (bzw. kleiner) ist sie.

Es gilt also etwa $-7 < -4 < 0 < 3 < \frac{12}{2}$ oder umgekehrt auch $11 > 4 > 0 > -2$

(Eine solche Kette kann natürlich nie die Zeichen > und < gleichzeitig enthalten)

Übung 2

1. Verbinden Sie die folgenden Zahlenpaare durch das jeweils passende Zeichen $>$, $<$, $\geq$, $\leq$ oder $=$:

   17 und 11; -4 und -2; 6 und -8; $\frac{12}{-3}$ und -4

2. Auf der Zahlengeraden liegen irgendwo die Zahlen *a, b*, und *c*.
   Es gilt $a < b$ und $c < 0$ und $b > 0$ und $c > a$
   Zeichnen Sie eine Zahlengerade mit den Zahlen 0, *a, b* und *c*, die diesen Aussagen entspricht.

3. Ordnen Sie die folgenden Zahlen, beginnend mit der kleinsten, zu einer Ungleichungskette.
   $-\frac{18}{2}$; 13; $\sqrt{225}$; $\sqrt{25}$; $-\sqrt{26}$; -2, $-\frac{29}{5}$

   (Hinweis: Trauen Sie sich ein bisschen etwas zu und greifen Sie nicht sofort zum Taschenrechner. Alle Zahlen lassen sich entweder im Kopf berechnen oder wenigstens in der Größe gegeneinander abschätzen)

2. Variablen, Terme, Umformung von Termen

2.1 Variablen

Jede der bisher erwähnten Zahlen, wie etwa $\frac{1}{6}$ oder -13, hat ihren festen Platz auf der Zahlengerade. Nun gibt es aber viele Fälle, wo Zahlen sich ändern können und daher eine Festlegung wenig sinnvoll wäre.

Beispiel: die Ihnen bestimmt geläufige Formel für die Rechtecksfläche, nämlich Rechtecksfläche = Länge mal Breite, oder kürzer: $A = l \cdot b$

Hier steht „*A*" für die Rechtecksfläche, „*l*" für die Länge und „*b*" für die Breite des Rechtecks. Alle drei sind Zahlen; die Formel gilt für **jedes** Rechteck, also sind hier für *A, l* und *b* alle positiven Zahlen denkbar, und zwar sowohl ganze und auch Bruchzahlen. Je nach Gestalt und Größe des Rechtecks ändern sich *l, b* und *A*. Solche Zahlen heißen Veränderliche oder Variablen (Einzahl: die oder eine Variable; Mehrzahl: Variablen).

Ein weiteres Beispiel ist die Ihnen bestimmt geläufige Variable *x*, mit der man meist eine gesuchte Zahl beschreibt.

2.2 Terme

Verbindet man einzelne Zahlen oder Variablen durch Rechenzeichen wie +, −, Bruchstrich usw., wie im Beispiel $l \cdot b$, so entsteht ein **Term**. Beispielsweise handelt es sich bei $\frac{a+5}{10}$ um einen Term. Ersetzen Sie *a* etwa durch die Zahl 3, so ergibt sich $\frac{3+5}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$, also ein bestimmter Zahlenwert.

Definition: *Ein Term ist ein Zahlenausdruck, der durch Einsetzen aller darin vorkommenden Variablen einen bestimmten Zahlenwert annimmt. Auch feste Zahlen sind (sehr einfache) Terme, ebenso einfache Variablen wie l, b oder x.*

Kennt man Länge und Breite des Rechtecks, so lässt sich dessen Fläche ausrechnen, indem man die Variablen *l* und *b* durch die entsprechenden Zahlen ersetzt und dann die Fläche *A* berechnet. **Dieser Vorgang, das Ersetzen einer Variablen durch eine feste Zahl, heißt Einsetzen (gelegentlich auch Belegen der Variablen).**

Dass Variablen meist durch Buchstaben dargestellt werden, hat einerseits praktische Gründe (es stehen viele solche Zeichen zur Verfügung, wie lateinische, griechische, Groß- und Kleinbuchstaben usw., deren Anzahl sich nahezu beliebig vergrößern lässt, indem man Indizes anhängt, also etwa a_1, a_2, x_1 usw.); oft sind in den Buchstaben auch Hinweise auf die praktische Bedeutung der Variablen, hier etwa *l* für Länge, *b* für Breite oder *A* für *Area* (lat.: Fläche).

Für Übungszwecke lässt sich auch ein ganzer Term einfach mit einem *t* oder t_1 oder t_2 oder einem anderen Buchstaben abkürzen.

Setzt man für **alle** in einem Term vorkommenden Variablen Zahlen ein, so lässt sich ein fester Zahlenwert für den Term ermitteln (im Beispiel handelt es sich natürlich um die Flächenmaßzahl des Rechtecks). **Dabei ist darauf zu achten, dass in jedem Fall für dieselbe Variable auch dieselbe Zahl eingesetzt werden muss.** (Beachten Sie: a, a_1 und a_2 etwa sind natürlich drei verschiedene Variable)

Beispiel: Beim Quadrat gilt Länge = Breite, hier also $l = b$. Für die Berechnung der **Quadrat**fläche reicht dann eine einzige Variable, denn Länge und Breite sind ja gleich: $A = l \cdot l$ oder $A = l^2$ oder auch $A = b^2$ oder auch $A = s^2$. Der Buchstabe *s* könnte für "Seite" stehen.